Ecuaciones con módulo. Proporción. Clasificación

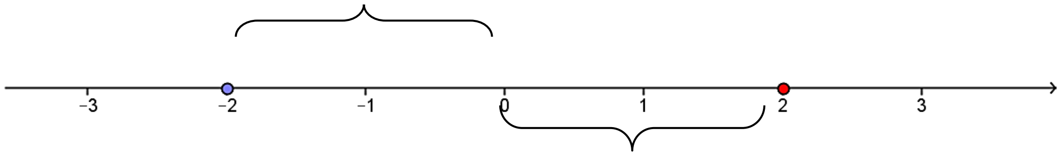
Módulo de un número real

El ***módulo*** o ***valor absoluto*** de un número es el mismo número si este es positivo, o su opuesto si es negativo.

Formalmente	Ejemplo	Lenguaje coloquial
$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$	$\lvert 2\rvert = 2$ $\lvert -2\rvert = -(-2) = 2$	El módulo de dos es dos. El módulo de menos dos es dos.

En cuanto a la representación gráfica, el módulo de un número representa la distancia entre cero y dicho número.

$|-2| = 2$



$|2| = 2$

Por representar una distancia, el módulo es un valor mayor o igual a cero, NUNCA ES NEGATIVO.

Existe otra forma de expresar el módulo de un número real, en la que interviene la raíz cuadrada de x^2:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 25$

$$|x| = \sqrt{25}$$

$x = 5 \quad \vee \quad x = -5$

v : se lee "o"

ECUACIONES CON MÓDULO

✓ **Ejemplo 1**

$$|x + 1| = 3$$

------------------ v ---------------------

------------------ ---------------------

X = 2 x = - 4

¿Cómo es la interpretación geométrica de la ecuación resuelta?

✓ **Ejemplo 2**

$$3 + 2.|x-2| = 7$$
$$2.|x-2| = 7-3$$
$$|x-2| = 4:2$$
$$|x-2| = 2$$

Separar en términos y comenzar a despejar hasta dejar solo el módulo

_________________ v ___________________

_________________ ___________________

En general, las ecuaciones con módulo tienen dos soluciones; salvo cuando están igualadas a cero.

Esta situación se formaliza de la siguiente manera, para el ejemplo 1, la solución es: $S = \{-4; 2\}$

Observa que se utilizan llaves para expresar la respuesta, porque se trata de un conjunto en el que estoy enumerando los valores que toma la incógnita. NUNCA utilices paréntesis ni corchetes, porque la solución no es un intervalo real.

Propiedades del Módulo

Enunciado	Lenguaje formal	Ejemplo
1) El módulo de un número real es igual al módulo de su opuesto, y nunca es negativo.	$\|a\| = \|-a\| = a \geq 0$	
2) El módulo del producto entre números reales es igual al producto de los módulos de los mismos.	$\|a.b\| = \|a\|.\|b\|$	
3) El módulo del cociente entre números reales es igual al cociente de los módulos de los mismos.	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|} \qquad b \neq 0$	

Aplicación de las propiedades del módulo en la resolución de ecuaciones.

$a)$ $$\frac{|-2x|}{5} + \left|\frac{3x}{-5}\right| = \left|\frac{-1}{6}\right|$$

....

....

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

MÓDULO. ECUACIONES II

1) Resuelvan las siguientes ecuaciones con módulo:

a) $|x| = 2$
b) $|x| = 16$
c) $|5x| = 10$
d) $|-2x + 3| = 7$
e) $(9x + 3)^2 = 25$
f) $\left|x - \frac{1}{3}\right| = 4$
g) $|3x - 4| = 23$
h) $|2x + 1| + 3 = 6$
i) $3 = \sqrt{(2x - 10)^2}$
j) $\left|\frac{2}{3}x + 4\right| - 5 = 2$
k) $|x - 4| + 3 = 5$
l) $|3x - 1| - 2 = \frac{1}{2}$
m) $|-3x| + |-x| = 4$
n) $|-8|.|-x| = |4(-4)|$
o) $3x^2 = x^2 + 18$
p) $3|x| - 18 = 6 + 2.9$
q) $|2x| + 3 = 5.6 - 15:3$
r) $|x - 3| = 2 - 5,\hat{3}$
s) $\frac{3}{5}|x + 1| = \frac{4}{5}$
t) $\left|\frac{5.(x-4)}{2}\right| = 7 + 2\,.\sqrt{\frac{9}{4}}$

2) Ecuaciones con estructura de proporción

La proporción se define como la igualdad de dos razones. Estas ecuaciones tienen esa estructura y se resuelven mediante el producto cruzado.

$a)\ \dfrac{2 - 2,5:5}{0,25} = \dfrac{x}{1,5 - 1,5:2}$

$b)\ \dfrac{x}{0,5 - 0,5:2} = \dfrac{1 - 1,25:5}{0,25}$

$c)\ \dfrac{0,5.\sqrt{2.1,8.10} + 2x}{0,6} = \dfrac{x + (-2)^3}{\frac{3}{5}}$

$d)\ \dfrac{4:\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0,5x} = \dfrac{10x}{\sqrt{25}}$

$\dfrac{0,3x}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}.2}} = \dfrac{3^{-2}}{\frac{1}{10}x}$

$f)\ \dfrac{2x - \frac{1}{2}}{\frac{4}{5}x^2} = \dfrac{5.\left(-\frac{2}{3}\right)^0}{2x - 0,5}$

$g)\ \dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}{2x + 1} = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{100 - 6^2.x^2}}$

$h)\ \dfrac{x.\sqrt[3]{9^{-1}.\frac{1}{3}}}{x + 2^2} = \dfrac{\frac{1}{10}:\sqrt{0,2^2}.x}{6}$

$i)\ \dfrac{-3 + 2x}{\left(\frac{5}{2} - 0,5\right)x} = \dfrac{2x}{2x - 3}$

$j)\ \dfrac{2x + 1}{x + 2} = \dfrac{4x - \frac{1}{2}}{2x + \frac{1}{4}}$

SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Situación problemática

En una granja hay únicamente conejos gallinas. En total, hay 40 animales y 100 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

Si llamamos **x** a la cantidad de conejos e **y** a la cantidad de gallinas, podemos plantear, a partir de los datos estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones, consideradas en forma simultánea (es decir que el valor de la incógnita x e y debe ser el mismo en ambas igualdades), representan un SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Resolver el sistema es encontrar, si existen, los valores de ambas incógnitas, que verifiquen las dos ecuaciones a la vez.

- <u>Método de Sustitución</u>

Para resolver el sistema por este método, elegimos cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo la primera y despejamos una de las variables, en este caso la **x**.

$$x + y = 40$$
$$x = 40 - y \quad \text{(I)}$$

En la otra ecuación, sustituimos **x** por la expresión equivalente hallada anteriormente **40 – y**. Podemos ver que nos queda una ecuación con la misma incógnita. Luego la resolvemos.

$$4x + 2y = 100$$
$$4(40 - y) + 2y = 100$$
$$160 - 4y + 2y = 100$$
$$-2y = 100 - 160$$
$$y = -60 : (-2)$$
$$y = 30$$

Sustituimos el valor de la **y** que hallamos, en la expresión **(I)** en la que aparecía despejada, y calculamos su valor. $x = 40 - y$

$$x = 40 - 30$$
$$x = 10$$

En la granja hay **30** gallinas con **60** patas y **10** conejos con **40** patas. Por lo tanto son **40** animales y en total hay **100** patas, es decir que la solución es correcta.

<u>En resumen</u>

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución** hay que seguir los siguientes pasos:

- Se despeja una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones.
- Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado en una incógnita que resulta de esta sustitución.
- Una vez calculada la primera incógnita, se calcula la otra en la ecuación despejada, obtenida en el primer paso.

Método de Igualación

Utilizamos el mismo problema

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas, por ejemplo x, en ambas ecuaciones.

En la primera ecuación $x + y = 40 \Rightarrow$ $x = 40 - y$

En la segunda ecuación $4x + 2y = 100 \Rightarrow 4x = 100 - 2y \Rightarrow x = \frac{100-2y}{4}$

Como los primeros miembros de las dos ecuaciones son iguales, los segundos miembros también lo son; por lo tanto, escribimos con ellos una igualdad y obtenemos una ecuación con la misma incógnita. Luego la resolvemos.

$$40 - y = \frac{100 - 2y}{4}$$

$$40 - y = 25 - \frac{1}{2}y$$

$$40 - 25 = -\frac{1}{2}y + y$$

$$15 = \frac{1}{2}y$$

$$30 = y$$

Sustituimos el valor de la incógnita que hallamos en una de las expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita, y calculamos su valor.

x = 40 – y

x = 40 – 30

x = 10

Hemos obtenido la misma solución que con el método de sustitución.

En Resumen

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación** hay que seguir los siguientes pasos:

- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación de una incógnita que resulta.
- Se calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas del primer paso.

En general, las condiciones de un sistema de ecuaciones nos permiten decidir qué método es el más conveniente. Por ejemplo, si en una de las ecuaciones hay una incógnita despejada, conviene el método de sustitución; si hay una misma incógnita despejada en las dos ecuaciones, conviene el método de igualación. Por cualquiera de los métodos se llega a la misma solución.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2
SISTEMA DE ECUACIONES

1) Resuelve por sustitución cada uno de los siguientes sistemas y comprueba las soluciones que obtengas.

a) $\begin{cases} -4x-2y=\frac{1}{2} \\ 3x-y=\frac{3}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x-2y=-5 \\ x-2y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 10x+2y-6=0 \\ x=\frac{3-y}{2} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \frac{3}{2}x+4y=1 \\ -2x-5y=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-10=3y \\ 5x+6y=25 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 4x+5y=-2 \\ -\frac{9}{2}y+2x=6 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 5x=2y-7 \\ 6=4y-2x \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 4\cdot(x-5)-2\cdot(y+4)=-14 \\ \frac{5-x}{3}-\frac{y-6}{3}=4 \end{cases}$

2) Resuelve por el método de igualación cada uno de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x-2y=25 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 3y-2x=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \frac{3}{2}x+\frac{4}{3}y=-1 \\ 5x-2y=16 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4y-3x=13 \\ 2\cdot(x+y)-3\cdot(x-y)=8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-3y=-2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3}+3=0 \\ x=-2y+5 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 5x-2y=-11 \\ 6x+4y=-10 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{3}=5 \\ 3x=2y+8 \end{cases}$

SISTEMAS EQUIVALENTES

Se llaman sistemas equivalentes a los sistemas de ecuaciones que tienen la misma solución.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+y=1 \end{cases} \longrightarrow S=\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y-x=-9 \\ 4x+y=10 \end{cases} \longrightarrow S=\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

Como la solución de ambos sistemas es $S=\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$, *entonces* los sistemas son equivalentes

ACTIVIDADES

3) Ana y María resolvieron los siguientes sistemas de ecuaciones. Ana dice que el ***a)*** y el ***d)*** son equivalentes, mientras que María dice que los que son equivalentes son el ***b)*** y el ***c)***. Resuelve los sistemas por el método que te parezca más conveniente y comprueba quién tiene razón.

a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x=3y-2 \\ -2x-y+7=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5=3y \\ 7y+11x=-4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 3x-\frac{5}{2}y=-5{,}5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} (2x+3y):2=5{,}5 \\ x-y=-2 \end{cases}$

4)Plantear el sistema y hallar la solución

a) Hallar los números que verifican que su diferencia es 2 y que el doble del primero menos el segundo es 9.
b) Brenda compró una bicicleta y un casco de ciclista por $ 108. Si el casco cuesta $ 72 menos que la bici, ¿Cuál es el precio de cada artículo?
c) Si me das una naranja tendré el doble de las tuyas. Si te doy una de las mías, tendremos igual cantidad. ¿Cuántas naranjas tenemos cada uno?
d) Con las 34 monedas de 25 y 50 centavos que tenían ahorradas, María se compró un chocolate que costaba $ 14. ¿Cuántas monedas de cada valor había en la alcancía?

f) En el triángulo ABC, la amplitud del ángulo $\hat{A}$ es de 40°. Calcula la medida de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$, sabiendo que la diferencia entre ambos es de 24°.

g) Calcula las medidas de dos ángulos complementarios, si se sabe que la amplitud de uno de ellos es el triple del otro más 10°.

h) En una caja hay tornillos pequeños que pesan 5g y tornillos grandes que pesan 10g. En total hay 340 tornillos, y pesan todos juntos 2,5kg. ¿Cuántos tornillos de cada tipo hay?

i) Lucía tenía dos años más que su hermano. Hace doce años, la edad de Lucía duplicaba a la de edad de él. ¿Cuántos años tienen ahora?

j) Sobre la mesa hay $1200 en monedas de oro y de plata. Cada moneda de plata vale $5, y cada moneda de oro vale $15. Con un pase mágico, Juan convierte las monedas de oro en plata y las de plata en oro. Ahora hay $3200 sobre la mesa. ¿Cuántas monedas de cada tipo había inicialmente?

k) El perímetro de un triángulo isósceles es de 18cm. Si el lado desigual aumenta un 20% y los lados iguales no cambian, su nuevo perímetro es de 18,8cm. ¿Cuánto mide cada lado del triángulo original? ***Nota:*** *Si aumentás una cantidad un 20%, pasa a ser el 120% de esa cantidad. Si disminuís una cantidad un 20% pasa a ser el 80% de esa cantidad.*

l) En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es igual a los siete medios del otro. ¿Cuál es la medida de cada uno?

m) Nicolás compra una camisa y un pantalón por $29. Si el pantalón aumenta un 10% y la camisa rebaja un 10% paga $28,50. ¿Cuáles son los precios originales de cada uno?

12) Un patrullero sale en persecución de un malhechor motorizado que se encuentra a 100m de él. Las siguientes ecuaciones dan la posición de cada uno de ellos medida en metros desde la posición de partida del patrullero, en el tiempo t, expresado en segundos.

Patrullero: $X_p(t) = 20\frac{m}{s} \cdot t$

Malhechor: $X_m(t) = 100m + 18\frac{m}{s} \cdot t$

a) Responde sin hacer cuentas. ¿Alcanza el patrullero al maleante? Justifica tu respuesta.

b) Si la respuesta anterior es afirmativa, encuentra en qué instante y en qué posición lo alcanza.

13) Inventa un problema que pueda resolverse con cada uno de los siguientes sistemas, y resuélvelo.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ x + y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y = x + 11 \\ x - y = -2 \end{cases}$